

Com a criteri general, les respostes s'han de justificar. Cada apartat de cada exercici té un punt com a puntuació màxima. El plantejament correcte de la resposta es puntuarà amb 0,5 punts. S'han de posar les unitats correctes a les solucions numèriques; si no són les correctes o no s'han posat, es restaran 0,25 punts. Les errades en els factors de les fórmules emprades també es penalitzaran amb 0,25 punts.

OPCIÓ A

1. Un satèl·lit artificial es troba en una òrbita circular al voltant de la Terra a 1 000 km per damunt de la superfície. Sabent que $R_T = 6\,370$ km i $M_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg, calculau:
 - a) La velocitat lineal del satèl·lit.
 - b) L'energia per unitat de massa que s'ha necessitat per posar el satèl·lit en aquesta òrbita des de la superfície terrestre.

-
- a) El radi de l'òrbita és $r = R_T + 1\,000$ km $= 7,37 \times 10^6$ m. De l'equació que resulta d'igualar les acceleracions centrípeta i gravitatòria podem aïllar v :

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M_T}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{G \frac{M_T}{r}} = 7,36 \text{ km/s}$$

- b) Negligint l'energia cinètica deguda a la rotació de la Terra, l'energia d'un satèl·lit de massa m a la superfície terrestre és:

$$E_{sup} = E_p = -G \frac{M_T m}{R_T}$$

L'energia del satèl·lit en l'òrbita és:

$$E_{orb} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{M_T m}{r} = \frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r} - G \frac{M_T m}{r} = -\frac{1}{2} G \frac{M_T m}{r}$$

Per tant, l'increment d'energia $\Delta E = E_{orb} - E_{sup}$ per unitat de massa serà:

$$\frac{\Delta E}{m} = G M_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r} \right) = 3,56 \times 10^7 \text{ J/kg}$$

-
2. Dues càrregues elèctriques de 2,4 nC i 1,2 nC es mantenen separades una distància $d = 1,7$ cm.
 - a) En quin punt de la recta que uneix les càrregues s'anul·la el camp elèctric?
 - b) Quina energia cinètica màxima pot adquirir un protó que es deixa anar lliurement des del punt anterior?

- a) Anomenam les càrregues $Q_1 = 2,4 \text{ nC}$ i $Q_2 = 1,2 \text{ nC}$ i observam que $Q_1 = 2 Q_2$. El punt on s'anul·la el camp elèctric ha de ser un punt situat entre les dues càrregues: es trobarà a una distància x de Q_1 i a una distància $d - x$ de Q_2 . La condició que els camps creats per Q_1 i Q_2 han de tenir el mateix mòdul implica:

$$k \frac{Q_1}{x^2} = k \frac{Q_2}{(d-x)^2} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2}$$

D'on resulta l'equació $x^2 - 4dx + 2d^2 = 0$, les solucions de la qual són $x = (2 \pm \sqrt{2})d$; d'aquestes la solució admissible és:

$$x = (2 - \sqrt{2})d = 1,0 \text{ cm}$$

El punt on s'anul·la el camp es troba a 1,0 cm de Q_1 i a 0,7 cm de Q_2 .

- b) L'energia cinètica que es demana serà igual a l'energia potencial del protó en aquest punt. La càrrega elèctrica del protó és la càrrega elemental $e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$. L'energia potencial inicial del protó, i per tant l'energia cinètica màxima que pot assolir, és:

$$U = eV = e \left(k \frac{Q_1}{x} + k \frac{Q_2}{d-x} \right) = 3,7 \text{ keV} = 5,93 \times 10^{-16} \text{ J}$$

3. Una partícula de massa $m = 25,0 \text{ g}$ realitza un moviment harmònic simple per al qual se satisfà la relació $a = -16x$, on x indica l'elongació de la partícula en metres i a la seva acceleració en m/s^2 . Sabent que l'amplitud és de 8,0 m, calculau:

- a) La freqüència i el valor màxim de la velocitat.
b) L'energia mecànica total d'aquesta partícula mentre descriu aquest moviment.

- a) En els moviments harmònics simples l'elongació, la velocitat i l'acceleració venen donades per:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad \rightarrow \quad v(t) = A\omega \cos(\omega t + \delta) \quad \rightarrow \quad a(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

De la condició $a = -16x$ deduïm $-A\omega^2 = -16A$. Per tant $\omega = 2\pi\nu = 4 \text{ s}^{-1}$ i la freqüència valdrà $\nu = 0,64 \text{ Hz}$. El valor màxim de la velocitat és $v_{max} = A\omega = 32 \text{ m/s}$.

- b) L'energia mecànica total en tot moment és la suma de les energies cinètica i potencial, $E_T = E_c + E_p$. Per tant, $E_T = E_{c,max} = \frac{1}{2}m v_{max}^2 = 12,8 \text{ J}$, ja que quan $v = v_{max}$ l'energia potencial és zero.

4. Un raig de llum blanca incideix des de l'aire sobre una làmina de vidre formant un angle de 30° amb la perpendicular.
- Quin angle formaran entre si, a l'interior del vidre, els raigs vermell i blau, components de la llum blanca, si els valors dels índexs de refracció del vidre per a aquests colors són $n_v = 1,612$ i $n_b = 1,671$?
 - Quins seran els valors de la freqüència i de la longitud d'ona corresponents a cada una d'aquestes radiacions en el vidre si les longituds d'ona en el buit són, respectivament, $\lambda_{0v} = 656,3 \text{ nm}$ i $\lambda_{0b} = 486,1 \text{ nm}$?

- a) D'acord amb la llei de Snell, l'angle θ_r que formarà la llum refractada dins del vidre serà:

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad \rightarrow \quad \theta_r = \arcsin \left(\frac{\sin \theta_i}{n_i} \right)$$

La diferència entre els angles que formaran els raigs vermell i blau refractats dins del vidre serà:

$$\Delta\theta_r = \arcsin \left(\frac{\sin 30^\circ}{1,612} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin 30^\circ}{1,671} \right) = 18,1^\circ - 17,4^\circ = 0,7^\circ$$

- b) Per a cada radiació se satisfà que $c = \lambda\nu$ on c és la velocitat de la radiació, λ la longitud d'ona i ν la freqüència. L'índex de refracció és $n = c_0/c$, on c_0 és la velocitat de la radiació en el buit i c la velocitat de la radiació en aquest medi. c_0 és la mateixa per a totes les radiacions electromagnètiques.

Les freqüències són pròpies de cada radiació i, per tant, les mateixes en tots els medis. Les freqüències de les radiacions vermella i blava són:

$$\begin{aligned} \nu_v &= \frac{c_0}{\lambda_{0,v}} = 457 \times 10^{12} \text{ Hz} \\ \nu_b &= \frac{c_0}{\lambda_{0,b}} = 617 \times 10^{12} \text{ Hz} \end{aligned}$$

La relació entre la longitud d'ona λ en un medi d'índex de refracció n i la longitud d'ona de la mateixa radiació en el buit λ_0 és:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c_0}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Les longituds d'ona de les radiacions vermella i blava en el vidre seran:

$$\begin{aligned} \lambda_v &= \frac{\lambda_{0,v}}{n_v} = 407,1 \text{ nm} \\ \lambda_b &= \frac{\lambda_{0,b}}{n_b} = 290,9 \text{ nm} \end{aligned}$$

5. a) Explicau el concepte de *període de semidesintegració*.
b) El triti ${}^3\text{H}$ s'utilitza per a la datació de vins. Té un període de semidesintegració de 12,33 anys. Calculau quant de temps ha estat envasat un vi si la seva activitat actual és un 10 % de la inicial.

-
- a) Període de semidesintegració, $t_{1/2}$, és el temps que ha de passar per tal que l'activitat d'una mostra radioactiva es redueixi a la meitat.
La relació entre el període de semidesintegració i la constant de desintegració λ és:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

- b) L'activitat d'una mostra radioactiva ve donada per:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

on A_0 és l'activitat inicial. $A(t)$ serà un 10 % de A_0 quan $e^{-\lambda t} = 0,1$, d'on podem aïllar t :

$$-\lambda t = \ln 0,1 \quad \rightarrow \quad t = -\frac{\ln 0,1}{\lambda} = -t_{1/2} \frac{\ln 0,1}{\ln 2} = 40,96 \text{ anys.}$$

OPCIÓ B

1. a) A quina altitud per sobre de la superfície terrestre la intensitat del camp gravitatori és el 20 % del valor a la superfície?
 b) Quin període tindria un satèl·lit que orbitàs la Terra a l'altitud determinada a l'apartat anterior?
 (Radi de la Terra $R_T = 6\,370$ km)

- a) Les intensitats del camp gravitatori a la superfície terrestre, g_0 , i a una altitud h , g , venen donades per:

$$g_0 = G \frac{M_T}{R_T^2} \quad g = G \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

La condició $g = 0,2 g_0$ ens determina l'altitud cercada. Imposant aquesta condició a g/g_0 s'obté:

$$\frac{g}{g_0} = \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{(1 + h/R_T)^2} = \frac{1}{5}$$

De la darrera igualtat podem aïllar h :

$$h = (\sqrt{5} - 1)R_T = 7\,870 \text{ km}$$

- b) El període d'un satèl·lit que orbita amb aquest radi $r = R_T + h = 14\,240$ km és:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

on v és la velocitat lineal del satèl·lit, que deduïm igualant les acceleracions gravitacional i centrípeta:

$$\frac{v^2}{r} = G \frac{M_T}{r^2} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{r}}$$

Substituint aquesta expressió a la del període obtenim:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{g_0 R_T^2}} = 1,69 \times 10^4 \text{ s} = 4,7 \text{ hores}$$

2. En un model simple de clorur sòdic podem considerar els ions Cl^- i Na^+ com a càrregues puntuals de valors $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ i $1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, respectivament. Aquestes càrregues es troben separades una distància $d = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}$. Calculau:
- a) La diferència de potencial entre els punts a i b situats tal com s'indica a la figura 1.
 b) L'energia necessària per dissociar el clorur sòdic segons aquest model.

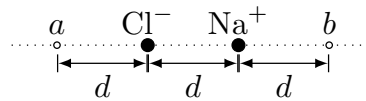


Figura 1: Esquema simple de NaCl i situació dels punts a i b .

- a) La càrrega elèctrica, en valor absolut, de cada un dels ions del clorur sòdic és la càrrega elemental e . El potencial en cada un dels punts a i b és:

$$V_a = V_{\text{Na}} + V_{\text{Cl}} = k \frac{e}{2d} - k \frac{e}{d} = -k \frac{e}{2d}$$

$$V_b = V_{\text{Na}} + V_{\text{Cl}} = k \frac{e}{d} - k \frac{e}{2d} = k \frac{e}{2d}$$

La diferència de potencial $\Delta V_{ab} = V_a - V_b$ serà:

$$\Delta V_{ab} = V_a - V_b = -k \frac{e}{2d} - k \frac{e}{2d} = -k \frac{e}{d} = -12,0 \text{ V}$$

- b) Per dissociar el clorur sòdic s'ha d'aportar una energia E igual a l'energia potencial d'un dels ions deguda a l'altre ió, $e V_i$,

$$E = -U = e V_i = e \cdot k \frac{e}{d} = 12,0 \text{ eV} = 1,9 \times 10^{-18} \text{ J.}$$

3. En una regió de l'espai hi ha un camp magnètic uniforme \mathbf{B} . Amb l'ajuda d'un diagrama en el qual aparegui representat \mathbf{B} , indicau la força (mòdul, direcció i sentit) que actua sobre una càrrega Q en els casos següents:

- a) La càrrega és positiva i es mou en la direcció del camp però en sentit contrari.
b) La càrrega és negativa i es mou en direcció perpendicular a \mathbf{B} .

La força magnètica \mathbf{F}_m sobre una càrrega Q que es mou amb velocitat \mathbf{v} dins un camp magnètic \mathbf{B} és $\mathbf{F}_m = Q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$

- a) Si la velocitat i el camp magnètic tenen la mateixa direcció el seu producte vectorial és zero i, per tant, $\mathbf{F}_m = 0$.
b) El mòdul de la força magnètica serà $|\mathbf{F}_m| = F_m = QvB \sin \theta$, on θ és l'angle que formen \mathbf{v} i \mathbf{B} . Si \mathbf{v} i \mathbf{B} són perpendiculars, $F_m = QvB$.
(Cal incloure figura amb indicació de la direcció i el sentit de la força per a $Q < 0$)

4. Una partícula de massa 2,0 kg efectua un moviment harmònic simple d'amplitud 1,0 cm. L'elongació i la velocitat de la partícula en l'instant inicial valen 0,5 cm i 1,0 cm/s, respectivament.
- Determinau la fase inicial i la freqüència d'aquest moviment.
 - Calculau l'energia total del moviment, així com l'energia cinètica i l'energia potencial a l'instant $t = 1,4$ s.

- a) L'elongació i la velocitat per a un moviment harmònic simple venen donades per

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad v(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Imposant les condicions inicials obtenim:

$$x(0) = A \sin \varphi \rightarrow \varphi = \arcsin(x(0)/A) = \arcsin 0,5 = \pi/6 \text{ rad} = 30^\circ$$

$$v(0) = A\omega \cos \varphi \rightarrow \omega = \frac{v(0)}{A \cos(\pi/6)} = \frac{1}{\cos(\pi/6)} = 2/\sqrt{3} \text{ s}^{-1} = 1,15 \text{ s}^{-1}$$

La freqüència ν serà

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \text{ Hz} = 0,18 \text{ Hz}$$

- b) L'energia cinètica és $E_c(t) = \frac{1}{2}m v^2(t)$. A $t = 1,4$ s serà:

$$E_c = \frac{1}{2}m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Substituint valors s'obté $E_c = 3,88 \times 10^{-5}$ J.

L'energia potencial $E_p = \frac{1}{2}k x^2$ on $k = \omega^2 m$ serà

$$E_p = \frac{1}{2}m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Substituint valors resulta $E_p = 9,46 \times 10^{-5}$ J.

Comprovam que l'energia total $E_T = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = 1,33 \times 10^{-4}$ J coincideix amb la suma dels resultats anteriors.

5. Quan incideix llum de longitud d'ona $\lambda = 621,5$ nm sobre una fotocèl·lula, aquesta emet electrons amb una energia cinètica de 0,14 eV. Calculau:

- El treball d'extracció de la fotocèl·lula.
- La freqüència llindar.
(Constant de Planck $h = 6,626 \times 10^{-34}$ J s = $4,135 \times 10^{-15}$ eV s)

- L'equació d'Einstein ens dona l'energia dels fotons incidents, E_f , en funció de la seva longitud d'ona λ o de la freqüència ν :

$$E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

El treball d'extracció, W_0 , és la diferència entre l'energia dels fotons i l'energia cinètica dels electrons emesos,

$$W_0 = \frac{hc}{\lambda} - E_c = 1,86 \text{ eV} = 2,97 \times 10^{-19} \text{ J}$$

- La freqüència llindar, ν_0 , es correspon amb la dels fotons que tenen una energia igual al treball d'extracció. Per tant:

$$\nu_0 = \frac{W_0}{h} = 448,6 \times 10^{12} \text{ Hz}$$

Aquesta freqüència es correspon amb una longitud d'ona de 668,3 nm.