Model 2. Solucions

Contestau de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzarà l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1. Un comerciant ven tres tipus de rellotges, A, B i C. Els rellotges de tipus A els ven a 300 €; els de tipus B, a 600 €, i els de tipus C, a 200 €. En un mes determinat va vendre 200 rellotges en total. Si la quantitat dels que va vendre aquest mes de tipus B va ser igual als que va vendre de tipus A i tipus C conjuntament, calculau quants rellotges va vendre de cada tipus si la recaptació d'aquest mes va ser de 89.000€. (10 punts)

Solució. Siguin:

$$x = \text{nombre de rellotges de tipus } A,$$
$$y = \text{nombre de rellotges de tipus } B,$$
$$z = \text{nombre de rellotges de tipus } C.$$

L'enunciat del problema es correspon amb el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=200, \\ 300x+600y+200z=89000, \\ y=x+z. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2z=200, \\ 900x+800z=89000. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+2z=200, \\ 9x+8z=890. \end{cases}$$

D'on: $x=90$, $y=100$ i $z=10$.

S'han venut, per tant: 90 rellotges de tipus A, 100 rellotges de tipus B i 10 rellotges de tipus C.

2. Una empresa de compra/venda d'automòbils ha comprovat que els últims 10 anys els seus beneficis/pèrdues s'ajusten a la funció

$$F(t) = t^3 - 18t^2 + 81t - 3, \ \ 0 \leq t \leq 10$$

en milers d'euros. Es demana:

a) En quins anys es produeixen els valors màxims i mínims d'aquesta funció? (5 punts)
b) Determinau els períodes de creixement i decreixement. (3 punts)
c) Quins són els seus beneficis màxims? Quin resultat va obtenir l'empresa l'últim any de l'estudi? (2 punts)

Model 2. Solucions

Solució. *a*) El màxim i mínim absolut de la funció $F(t)$ es troben en els extrems relatius o en els extrems de l'interval $[0,10]$.

$$F'(t) = 3t^2 - 36t + 81,\;\; F'(t) = 0 \;\Rightarrow\; t = 3, t = 9.$$

Tenim que,

$$\begin{aligned} F''(t) = 6t - 36 \;\Rightarrow\; & F''(3) = -18 < 0 \;\Rightarrow\; \text{màxim relatiu}, \\ \Rightarrow\; & F''(9) = 18 > 0 \;\Rightarrow\; \text{mínim relatiu}. \end{aligned}$$

$$F(0) = -3,\;\; F(10) = 7,\;\; F(3) = 105,\;\; F(9) = -3.$$

El valor màxim s'aconsegueix als tres anys de començar l'estudi.
El valor mínim de l'estudi es dóna a l'inici de l'estudi ($t = 0$) i al cap de 9 anys.

b) De l'apartat anterior ja coneixem els possibles intervals de creixement i decreixement: $(0,3)$, $(3,9)$ i $(9,10)$. Per tant, com que

$$F'(1) = 48 > 0,\;\; F'(4) = -15 < 0,\;\; F'(9.5) = 9.75 > 0.$$

Fem la taula següent per estudiar el creixement i el decreixement:

x	0		3		9		10
$F'(t)$		$+$		$-$		$+$	
$F(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Per tant, la funció serà creixent als intervals $(0,3)$ i $(9,10)$, i decreixent a l'interval $(3,9)$.

c) Els beneficis màxims són de 105.000 €, ja que

$$F(3) = 105 \;\Rightarrow\; 105.000€$$

Com que $F(10) = 7$, els beneficis l'últim any de l'estudi són de 7.000 €.

3. Siguin A i B dos successos tals que $p(A \cup B) = 0.9$, $p(A^c) = 0.4$, on A^c denota el succés complementari del succés A, i $P(A \cap B) = 0.2$. Calculau les probabilitats següents: $p(B)$ (3 punts), $p(A/B)$ (2 punts), $p(A \cap B^c)$ (3 punts) i $p(A^c \cup B^c)$ (2 punts).

Solució.

$p(B)$:

$$\begin{aligned} 0.9 = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) &= 1 - p(A^c) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= 1 - 0.4 + p(B) - 0.2 = 0.4 + p(B) \;\Rightarrow\; p(B) = 0.5. \end{aligned}$$

a) $p(A/B)$:

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4.$$

Model 2. Solucions

b) $p(A \cap B^c)$:

$$p(A \cap B^c) = p(A) - p(A \cap B) = 1 - p(A^c) - p(A \cap B) = 1 - 0.4 - 0.2 = 0.4.$$

c) $p(A^c \cup B^c)$:

$$p(A^c \cup B^c) = p((A \cap B)^c) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

4. A partir d'una mostra de 100 individus, s'ha realitzat una estimació de la proporció mitjançant l'interval de confiança $(0.17, 0.25)$. Quin és el nivell de confiança amb el qual s'ha realitzat l'estimació? (10 punts)

Solució. Un interval de confiança per a la proporció amb un nivell de confiança $(1-\alpha)\cdot 100\%$ és

$$I = \left(p - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right), \; q = 1-p.$$

El punt mitjà d'aquest interval és precisament p:

$$p = \frac{0.17+0.25}{2} = \frac{0.42}{2} = 0.21 \;\Rightarrow\; q = 1 - 0.21 = 0.79.$$

Per altra part, l'error:

$$E = \frac{longitud(I)}{2} = \frac{0.25-0.17}{2} = \frac{0.08}{2} = 0.04.$$

Per tant:

$$z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{0.21\cdot 0.79}}{\sqrt{100}} = 0.04 \;\Rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.98.$$

Així:

$$p(z > z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; p(z > 0.98) = 1 - \phi(0.98) = 0.1635,$$
$$\frac{\alpha}{2} = 0.1635 \;\Rightarrow\; \alpha = 0.3270 \;\Rightarrow\; 1-\alpha = 0.6730.$$

L'estimació de la proporció mitjançant l'interval $(0.17, 0.25)$ s'ha realitzat amb un nivell de confiança del 67,30%.

Model 2. Solucions

OPCIÓ B

1. Es considera el següent sistema d'equacions dependent del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - ky - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Es demana:

a) Determinau els valors de k per als quals el sistema és compatible determinat. (6 punts)
b) Resoleu el sistema quan $k = 2$. (4 punts)

Solució. *a*) La matriu del sistema és:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -k & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \det(A) = 4k + 4.$$

El sistema serà compatible determinat sempre que $4k + 4 \neq 0$, és a dir, $k \neq -1$.

b) Hem de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - 2y - z = 0, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases} \Rightarrow \ x = \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}, z = -\frac{1}{4}.$$

2. Calculau l'àrea de la figura plana limitada per la recta $y = 2x$ i la corba $y = x^2 - 3$ (6 punts). Dibuixau el recinte limitat per ambdues corbes (4 punts).

Solució. Calculem els punts de tall entre ambdues corbes:

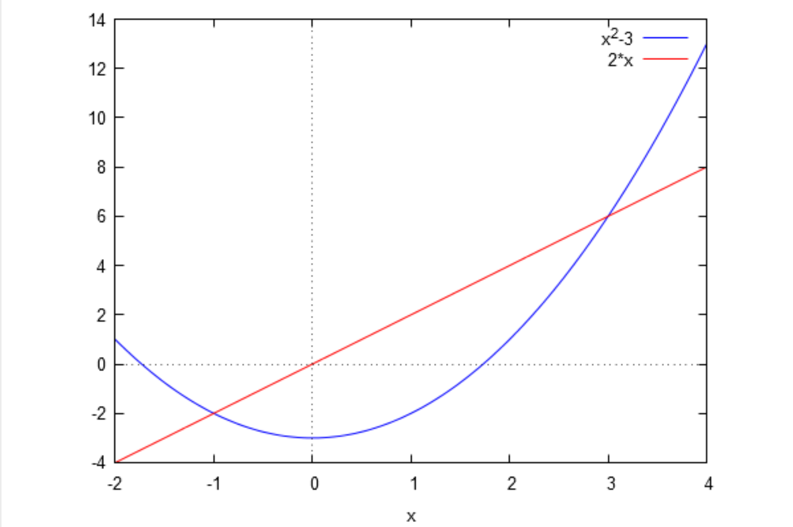
$$x^2 - 3 = 2x \ \Rightarrow \ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Rightarrow \ x = 3, \ x = -1.$$

Aleshores, l'àrea demanada serà:

$$\mathcal{A} = \int_{-1}^{3} (2x - (x^2 - 3))dx = \int_{-1}^{3} (2x - x^2 + 3)dx = 2\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 3x \Big|_{x=-1}^{x=3} = \frac{32}{3} u^2.$$

A la figura es pot veure la regió associada al problema.

Model 2. Solucions



3. Considerau la funció

$$f(x)=\begin{cases} e^{x-1}, & \text{si } -1\le x<1 \\ (x+a)^2, & \text{si } x\ge 1. \end{cases}$$

Es demana:

a) Per a quins valors de a la funció és contínua a $x=1$? (6 punts)

b) Per al valor de a que fa contínua la funció f en tot el seu domini, calculau les derivades de f en els punts $x=0$ i $x=3$. Com és el creixement i decreixement de la funció en aquests punts? (4 punts)

Solució. *a*) La funció $f(x)$ serà contínua a $x=1$ sempre que:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1).$$

Per tant:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} e^{x-1}=e^0=1, \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+a)^2=(1+a)^2. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (1+a)^2=1.$$

D'on $a^2+2a+1=1$, i per tant, $a=0$ o $a=-2$.

b)

$$\begin{array}{rl} x=0\in[-1,1) & \Rightarrow f'(x)=e^{x-1}, \\ & \quad f'(0)=e^{-1}>0. \\ x=3\in[1,+\infty) & \Rightarrow f'(x)=2(x+a), \\ & \quad \text{Si } a=0,\ f'(3)=2(3+0)=6>0. \\ & \quad \text{Si } a=-2,\ f'(3)=2(3-2)=2>0. \end{array}$$

Model 2. Solucions

Com que les derivades són positives en tots dos punts, la funció és creixent.

4. Un estoig conté 17 llapis de color vermell i 13 de color blau.

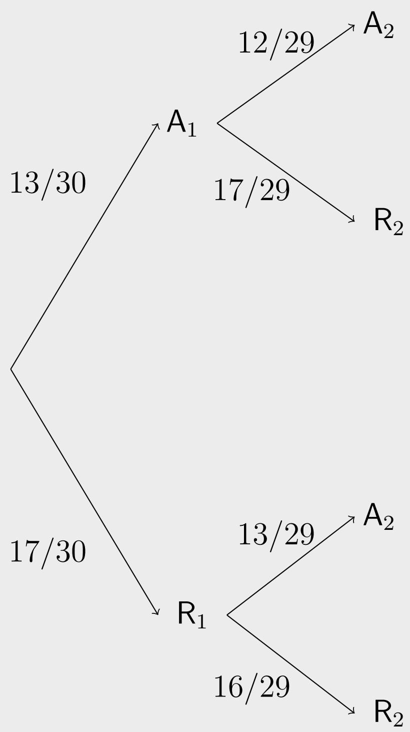
a) Si en triam un a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui vermell? (2 punts)

b) Si n'extraiem dos a l'atzar, sense reemplaçament, quina és la probabilitat que tots dos siguin de color blau? (4 punts)

c) Si en triam dos a l'atzar, sense reemplaçament, calculau la probabilitat que el primer sigui blau i el segon sigui vermell. (4 punts)

Solució. Tenim: $17 + 13 = 30$ llapis en total. Considerem els successos següents:

$$A = \text{llapis de color blau},$$
$$B1 = \text{llapis de color vermell}.$$



a) $p(R) = \frac{17}{30}$.

b)

$$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)p(A_2/A_1) = \frac{13}{30}\frac{12}{29} = \frac{26}{145}.$$

c)

$$p(A_1 \cap R_2) = p(A_1)p(R_2/A_1) = \frac{13}{30}\frac{17}{29} = \frac{221}{870}.$$

Model 2. Solucions

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula 2: Taula de la distribució normal $N(0,1)$.